ZBIRKA ZADATAKA
SA PISMENIH ISPITA IZ LINEARNE ALGEBRE

Zadani su vektori

$$a_1 = (4,2,1),\ a_2 = (5,3,2),\ a_3 = (3,2,1),$$

te,

$$b_1 = (-1,4,0),\ b_2 = (4,3,1),\ b_3 = (-5,7,-3).$$

Dokažite da skupovi $\{a_1, a_2, a_3\}$ i $\{b_1, b_2, b_3\}$ čine dvije baze za $\mathbf{R}^3$. Nađite matricu prijelaza iz jedne baze u drugu.

Na vektorskom prostoru $\mathbf{R}_n[X]$ (polinoma s realnim koeficijentima stupnja najviše n) zadan je linearni operator D_a s

$$(D_a(p))(t) = \frac{p(t+a) - p(t)}{a}, \quad a \in \mathbf{R},\ a \neq 0.$$

Nađite jezgru i sliku od D_a.

Zadan je unitarni prostor $M_2(\mathbf{R})$ sa skalarnim produktom

$$\langle A|B\rangle = \mathrm{tr}(AB^*)$$

i neka je $L \leq M_2(\mathbf{R})$ definiran kao

$$L = [\left\{\begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 3 & -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 6 & -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\right\}].$$

Nađite ortonormiranu bazu za L.

Odredite nužne i dovoljne uvjete da sustav

$$\begin{array}{cccccccccc}
ax_1 & - & x_2 & & & & & & = & n \\
ax_1 & + & bx_2 & - & x_3 & & & & = & n-1 \\
ax_1 & + & & & bx_3 & - & x_4 & & = & n-2 \\
 & \vdots & & & & \ddots & & & & \\
ax_1 & + & & & & & bx_{n-1} & - \; x_n & = & 2 \\
ax_1 & + & & & & & & bx_n & = & 1
\end{array}$$

ima jedinstveno rješenje.

. Zadan je linearni operator $T : V^2(O) \to V^2(O)$ svojom matricom $T = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ u kanonskoj bazi $\{\vec{i}, \vec{j}\}$. Neka su $\vec{a} = \vec{i} + \vec{j}$, $\vec{b} = \vec{i} - 2\vec{j}$.
(a) Odredite $T(\vec{a})$, $T(\vec{b})$.
(b) Za koje su $\alpha \in \mathrm{R}$ vektori $T(\vec{a})$, $T(\vec{a} + \alpha\vec{b})$ kolinearni?

Neka je

$$L = \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathrm{R}^n : x_1 + x_2 = 0,\ x_1 + x_2 + x_3 = 0, \ldots, x_1 + x_2 + \cdots + x_n = 0\}.$$

Dokažite da je L potprostor od R^n, odredite mu bazu, dimenziju i neki direktni komplement.

Neka je T linearan operator na prostoru $V^2(O)$ koji vektor najprije rotira za kut $\frac{\pi}{3}$ oko ishodišta u pozitivnom smjeru, a zatim zrcali u odnosu na pravac $y = x$. Nađite matricu operatora T u bazi $\{\overrightarrow{i} + \overrightarrow{j}, \overrightarrow{i} - \overrightarrow{j}\}$.

Izračunaj determinantu:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1-x & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 0 & 1-x & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ \vdots & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1-x & 1 \end{vmatrix}_n .$$

Neka je $M = \{X \in M_2(\mathbf{R}) : AX = 0\}$ gdje je $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 6 & 3 \end{pmatrix}$. Odredite bazu i dimenziju vektorskog potprostora M. Nađite mu i (neku) bazu za direktni komplement.

Neka je A linearni operator na $V^2(O)$ koji djeluje tako da vektor prvo zarotira za kut $\frac{\pi}{2}$ u pozitivnom smjeru, a dobiveni vektor zatim zrcali u odnosu na x-os.
a) Odredite matricu operatora A u standardnoj bazi $\{\vec{i}, \vec{j}\}$.
b) Odredite $\vec{v} \in V^2(O)$ takav da je $A\vec{v} = \vec{v}$ i $\|\vec{v}\| = 2\sqrt{2}$.

Izračunajte determinantu

$$D_{2n} = \begin{vmatrix} -2 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 4 \\ 0 & -2 & 0 & \cdots & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & \cdots & 4 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 4 & 0 & \cdots & 0 & -2 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & -2 \end{vmatrix}$$

U prostoru $\mathbb{R}^5$ zadan je potprostor M razapet vektorima $(0,0,1,0,0)$ i $(0,1,0,1,0)$ i potprostor

$$L = \{x = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \in \mathbb{R}^5 : x_1 - x_2 + x_3 = 0,\ 2x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 = 0\}.$$

Odredite $\dim L$, $\dim(M + L)$ i $\dim(M \cap L)$.

Neka je T linearan operator na prostoru $V^2(O)$ koji vektoru pridružuje centralnu simetriju (s obzirom na ishodište) njegove ortogonalne projekcije na pravac $y = -x$. Odredite djelovanje linearnog operatora T na proizvoljnom vektoru $\vec{v} = x\vec{i} + y\vec{j}$ i odredite mu matrični prikaz u standardnoj bazi, te u bazi $\{\vec{i} + \vec{j}, 2\vec{i} + \vec{j}\}$.

. Zadan je skup $L = \{A \in M_2(\mathbf{R}) : AX - XA = 0\}$, gdje je $X = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$. Dokažite da je L potprostor od $M_2(\mathbf{R})$, te mu nađite jednu bazu i odredite dimenziju. Nadalje, konstruirajte bazu prostora $M_2(\mathbf{R})$ čiji niti jedan vektor ne leži u L. Odgovor obrazložite.

Odredite vrijednosti parametra $a \in \mathbf{R}$ za koje sustav

$$\begin{array}{ccccccccccc}
x_1 & + & x_2 & + & x_3 & + & \cdots & + & x_n & = & 1 \\
x_1 & + & (1-a)x_2 & + & x_3 & + & \cdots & + & x_n & = & 1 \\
x_1 & + & x_2 & + & (2-a)x_3 & + & \cdots & + & x_n & = & 1 \\
\vdots & & & & & & & & & & \\
x_1 & + & x_2 & + & x_3 & + & \cdots & + & (n-1-a)x_n & = & 1
\end{array}$$

ima jedinstveno rješenje i nađite to rješenje.

. Neka je $T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ matrica linearnog operatora $T : V^3(O) \to V^3(O)$ u bazi $\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\}$ gdje je $\vec{a} = \vec{i}$, $\vec{b} = \vec{i} + \vec{j}$, $\vec{c} = \vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$.

a) Odredite $T(\vec{a})$, $T(\vec{b})$ i $T(\vec{c})$.

b) Odredite vektor $\vec{v} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} \in V^3(O)$ takav da je $T(\vec{v}) = \vec{i} - \vec{j}$.

Zadana je matrica n-tog reda

$$A_n = \begin{pmatrix} 7 & 3 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 2 & 7 & 3 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 7 & \cdots & 0 & 0 \\ . & . & . & \ddots & . & . \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 7 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 2 & 7 \end{pmatrix}.$$

Izračunajte $\det A_n$. Postoji li $n \in \mathbb{N}$ za koji je matrica A singularna?

. U $M_2(\mathbb{R})$ zadani su potprostori $M = \{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} : a - 2b = 0,\ a + c + d = 0\}$ i $N = \{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} : a + c = 0,\ a - 2b + d = 0\}$. Odredite po jednu bazu za M, N, $M + N$ i $M \cap N$.

Neka je

$$\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

matrica linearnog operatora $T : V^2(0) \to V^2(0)$ u bazi $\{\vec{a}, \vec{b}\}$, gdje je $\vec{a} = 2\vec{i} + \vec{j}$ i $\vec{b} = -\vec{i} - \vec{j}$.

(i) Odredite matricu linearnog operatora T u standardnoj bazi $\{\vec{i}, \vec{j}\}$.

(ii) Odredite sve jedinične vektore $\vec{v} \in V^2(0)$ za koje je $T\vec{v} = 2\vec{v}$.

Matrica $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ je zadana sa

$$\begin{pmatrix} x-1 & -1 & -1 & \cdots & -1 & -1 & n-1 \\ -x & x-1 & -1 & \cdots & -1 & -1 & n-2 \\ 0 & -x & x-1 & \cdots & -1 & -1 & n-3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x-1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -x & x-1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -x & x \end{pmatrix},$$

gdje je $x \neq 0$. Nađite $det(A)$ i $det(\tilde{A})$.

Zadan je vektorski prostor

$$L = \{(z_1, z_2, z_3) \in \mathbb{C}^3 : z_1 + z_2 = 0, -z_1 + 2z_2 + z_3 = 0\}.$$

Odredite mu bazu, dimenziju, te jedan direktni komplement ako L shvatimo kao

(i) kompleksan vektorski potprostor od $\mathbb{C}^3$,

(ii) realan vektorski potprostor od $\mathbb{C}^3_{\mathbb{R}}$.

Neka je T linearan operator na prostoru $V^2(O)$ koji vektor najprije zrcali s obzirom na pravac $y = -x$, zatim ga rotira za kut $\pi/4$ oko ishodišta u negativnom smjeru, te zatim zrcali s obzirom na pravac $y = x$.
Nađite matricu operatora T u bazi $\{2\vec{i} - \vec{j}, -\vec{i} + 2\vec{j}\}$.

Izračunajte determinantu n–tog reda

$$\begin{vmatrix} a & b & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & a & b & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & b & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & a & b \\ b & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & a \end{vmatrix}$$

Zadan je skup

$$V = \left\{ \begin{bmatrix} z_1 & z_2 \\ z_3 & z_4 \end{bmatrix} \in \mathrm{M}_2(\mathbb{C}) : z_1 - 2\overline{z_2} + z_3 = 0,\ z_1 + \overline{z_2 + z_3} + z_4 = 0 \right\}.$$

Dokažite da je V realni vektorski prostor, nađite mu neku bazu i odredite dimenziju. Da li je V kompleksni vektorski prostor? Ukoliko jest, nađite mu bazu i dimenziju.

Neka je

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

matrica linearnog operatora T u kanonskoj bazi. Odredite matricu operatora T u bazi $\vec{a} = (2, 0, 1)$, $\vec{b} = (1, 1, 1)$, $\vec{c} = (3, -2 - 1)$.

Uz uvjet $\sum_{i=1}^{n-1} x_i = 0$ izračunajte determinantu n-tog reda

$$D_n = \begin{vmatrix} x & x & 0 & \dots & 0 & 0 \\ x_1 & -x & x & \dots & 0 & 0 \\ x_2 & 0 & -x & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ x_{n-2} & 0 & 0 & \dots & -x & x \\ x_{n-1} & 0 & 0 & \dots & 0 & -x \end{vmatrix}.$$

U $V^3(O)$ zadani su vektori $\vec{v}_1 = 2\vec{i} + (2-b)\vec{j} + a\vec{k}$, $\vec{v}_2 = a\vec{i} + b\vec{j} + 3\vec{k}$, $\vec{v}_3 = \vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$. Za koje vrijednosti parametara $a, b \in \mathbb{R}$ vektori$\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$ čine bazu za $V^3(O)$? Za $a = 1$ i $b = 2$ odredite prikaz vektora $(1, 0, 1)$ u bazi $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$.

Neka je T linearni operator na prostoru $V^2(O)$ koji najprije zrcali s obzirom na pravac $y = x$, a zatim rotira za kut $\pi/4$ oko ishodišta u pozitivnom smjeru. Nađite matricu operatora T u bazi $\{\vec{i} - \vec{j}, 2\vec{i} - \vec{j}\}$.

Izračunajte determinantu n-tog reda

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & \dots & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Zadan je linearni operator $T : V^2(O) \to V^2(O)$ svojom matricom $T = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$ u bazi $\{\vec{a}, \vec{b}\}$, gdje je $\vec{a} = 2\vec{i} + \vec{j}$, $\vec{b} = \vec{i} + 3\vec{j}$.

a) Odredite matricu operatora T u kanonskoj bazi $\{\vec{i}, \vec{j}\}$.

b) Odredite vektor $\vec{v} = x\vec{i} + y\vec{j}$ ako je $T(\vec{v}) = 3\vec{i} - \vec{j}$.

Za koje je vrijednosti parametra $a \in \mathbb{R}$ matrica

$$A = \begin{pmatrix} -a^2 & -a^2+1 & -a^2+1 & \dots & -a^2+1 \\ -a^2+1 & 0 & -a^2+1 & \dots & -a^2+1 \\ -a^2+1 & -a^2+1 & 0 & \dots & -a^2+1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a^2+1 & -a^2+1 & -a^2+1 & \dots & 0 \end{pmatrix} \in M_n(\mathbb{R})$$

regularna?

Izračunajte determinantu

$$D_n = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & . & . & & 1 & 1 \\ 1 & a_1 & 0 & . & . & . & 0 & 0 \\ 1 & 0 & a_2 & . & . & . & 0 & 0 \\ . & . & . & . & & & . & . \\ . & . & . & & . & & . & . \\ . & . & . & & & . & . & . \\ 1 & 0 & 0 & . & . & . & a_{n-1} & 0 \\ 1 & 0 & 0 & . & . & . & 0 & a_n \end{vmatrix}.$$

. Neka je

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$$

matrica linearnog operatora $T : V^2(O) \to V^2(O)$ u kanonskoj bazi $\{\vec{i}, \vec{j}\}$. Odredite matricu operatora T u bazi $\{\vec{i} + 2\vec{j}, \vec{i} + 3\vec{j}\}$. Da li postoji vektor $\vec{v} \in V^2(O)$ takav da je $T(\vec{v}) = 3\vec{i} + 5\vec{j}$?

Izračunajte determinantu n-tog reda

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 & 3 & \dots & n-1 & n \\ 1 & 4 & 3 & \dots & n-1 & n \\ 1 & 2 & 6 & \dots & n-1 & n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & 2 & 3 & \dots & 2n-2 & n \\ 1 & 2 & 3 & \dots & n-1 & 2n \end{bmatrix}.$$

Neka je

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

matrica linearnog operatora $T : V^2(O) \to V^2(O)$ u bazi $\{2\vec{i} - \vec{j}, 2\vec{j} - \vec{i}\}$. Odredite matricu operatora T u bazi $\{\vec{i} + \vec{j}, 3\vec{j}\}$.

Izračunajte determinantu n-tog reda

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 0 & \dots & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ -1 & -1 & -1 & \dots & 0 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & \dots & -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

U vektorskom prostoru $\mathcal{P}_4$ realnih polinoma stupnja ≤ 4 dan je skup

$$M = \{p \in \mathcal{P}_4 : p'(0) = p(1), p''(0) = 2p(-1)\}.$$

Dokažite da je M vektorski potprostor od $\mathcal{P}_4$, odredite mu jednu bazu i dimenziju, te jedan direktni komplement.

Za koje vrijednosti parametara α, β sustav $Ax = b$ ima jedinstveno rjeenje, pri čemu je A matrica n-tog reda:

$$A = \begin{pmatrix} \alpha+\beta & \alpha\beta & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 1 & \alpha+\beta & \alpha\beta & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \alpha+\beta & \ldots & 0 & 0 \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & \alpha+\beta & \alpha\beta \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 & \alpha+\beta \end{pmatrix}.$$

Zadan je linearni operator $T : V^2(O) \to V^2(O)$ svojim matričnim prikazom $T = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ u kanonskoj bazi $\{\vec{i}, \vec{j}\}$. Neka su $\vec{a} = \vec{i} + \vec{j}$, $\vec{b} = \vec{i} - 2\vec{j}$.

a) Za koje su $\alpha \in \mathrm{R}$ vektori $T(\alpha\vec{a} + \vec{b})$ i $T(\vec{b})$ kolinearni?

b) Nađite matrični prikaz operatora T u bazi $\{\vec{a}, \vec{b}\}$.

Neka je T linearni operator na $V^2(O)$ koji vektor najprije rotira za kut $\frac{3\pi}{4}$ u pozitivnom smjeru, dobiveni vektor zatim zrcali na pravcu $y = x$ i nakon toga dobiveni vektor zrcali na x-osi. Odredite matricu operatora T u bazi $\{\vec{i} + \vec{j}, \vec{j}\}$, te odredite vektor $\vec{v} \in V^2(O)$ takav da je $T(\vec{v}) = 2\vec{i}$.

Zadana je matrica

$$A = \begin{pmatrix} 6 & 9 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 6 & 9 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 6 & \cdots & 0 & 0 \\ . & . & . & \ddots & . & . \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 6 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 6 \end{pmatrix} \in M_n(\mathbb{R}).$$

Izračunajte $\det(A^{-2})$.

Zadan je vektorski prostor $M = \{(z_1, z_2, z_3, z_4) \in \mathbb{C}^4 : z_1 + 2z_2 + z_3 = 0,\ 2z_1 + z_2 - -z_3 = 0,\ z_1 + 5z_2 + 4z_3 = 0\}$. Odredite mu bazu, dimenziju, te po jedan direktni komplement ako M shvatimo kao

(i) kompleksan vektorski potprostor od $\mathbb{C}^4$,

(ii) realan vektorski potprostor od $\mathbb{C}^4_{\mathbb{R}}$.

Linearni operator $T : V^2(O) \to V^2(O)$ dan je svojom matricom

$$\begin{bmatrix} 6 & 7 \\ -4 & -4 \end{bmatrix}$$

u bazi $\{\vec{a}, \vec{b}\}$, gdje je $\vec{a} = \vec{i} + \vec{j}$ i $\vec{b} = 2\vec{i} + \vec{j}$.

(a) Odredite matricu operatora T u kanonskoj bazi $\{\vec{i}, \vec{j}\}$.

(b) Odredite sve vektore $\vec{v} \in V^2(O)$ takve da su vektori $\vec{v}$ i $T(\vec{v})$ okomiti.

Izračunajte determinantu matrice n-tog reda $A = [a_{ij}] \in M_n(\mathbf{C})$, gdje je $a_{ij} = i + j$, tj.

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 & \dots & n & n+1 \\ 3 & 4 & 5 & \dots & n+1 & n+2 \\ 4 & 5 & 6 & \dots & n+2 & n+3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ n & n+1 & n+2 & \dots & 2n-2 & 2n-1 \\ n+1 & n+2 & n+3 & \dots & 2n-1 & 2n \end{vmatrix}.$$

Zadano je preslikavanje $T : V^3(O) \to V^3(O)$ izrazom

$$T(a\overrightarrow{i} + b\overrightarrow{j} + c\overrightarrow{k}) = (a - 2b + c) \cdot \overrightarrow{i} + 3a \cdot \overrightarrow{j} - (2a - 4c)\overrightarrow{k}.$$

Dokažite da je T linearni operator i odredite mu matrični prikaz u bazi $\{\overrightarrow{i} - \overrightarrow{j}, 2\overrightarrow{i} + \overrightarrow{j}, \overrightarrow{i} + \overrightarrow{k}\}$.

Izračunajte rang $n \times n$ matrice $A = [a_{ij}]$ s općim članom $a_{ij} = i + j$, tj.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 & \dots & n & n+1 \\ 3 & 4 & 5 & \dots & n+1 & n+2 \\ 4 & 5 & 6 & \dots & n+2 & n+3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ n & n+1 & n+2 & \dots & 2n-2 & 2n-1 \\ n+1 & n+2 & n+3 & \dots & 2n-1 & 2n \end{bmatrix}$$

Dokažite da je $V = \{\mathbf{A} \in \mathbf{M}_2(\mathbf{R}) : \mathbf{tr}\mathbf{A}^T = 0\}$ vektorski prostor. Nađite mu bazu i dimenziju. Nadopunite nađenu bazu do baze za $\mathbf{M}_2(\mathbf{R})$.

U prostoru svih realnih nizova $\mathrm{R}^{\mathbf{N}}$ zadan je skup

$$L = \{(a_n) \in \mathrm{R}^{\mathbf{N}} : a_{n+2} - 2a_n = 0, \;\; n \in \mathrm{N}\}.$$

a) Dokažite da je L potprostor od $\mathrm{R}^{\mathbf{N}}$ i odredite mu bazu i dimenziju.
b) Dokažite da je preslikavanje $A : L \to L$ koje nizu (a_n) pridružuje niz (a_{n+2}) (tj. niz s općim članom a_{n+2}) linearni operator.
c) Odredite matricu operatora $A : L \to L$ u nađenoj bazi.
d) Odredite jezgru i sliku operatora A.

Hermitskom matricom $\begin{bmatrix} 1 & a \\ b & 2 \end{bmatrix}$, kao matricom u kanonskoj bazi, zadan je linearni operator $A : \mathbf{C}^2 \to \mathbf{C}^2$. Odredite uvjete na koeficijente $a, b \in \mathbf{C}$ ako je poznato da je $0 \in \sigma(A)$. Postoji li baza u kojoj se A dijagonalizira? Ako postoji, nađite je.

Neka je $\mathcal{P}_2$ prostor realnih polinoma stupnja ≤ 2.
a) Pokažite da je sa

$$(p, q) = p(1)q(1) + 2p(0)q(0) + p(-1)q(-1)$$

definiran skalarni produkt na $\mathcal{P}_2$.
b) Za potprostor L određen polinomima $p_1(x) = 1$ i $p_2(x) = x$ odredite ortogonalni komplement.

Zadana je matrica

$$A = \begin{pmatrix} 7 & -4 & 0 \\ a & -7 & b \\ 3 & -2 & 0 \end{pmatrix},$$

čije su dvije svojstvene vrijednosti -1 i 1. Odredite $a, b \in \mathbb{R}$ i algebarske kratnosti svih svojstvenih vrijednosti od A.

Zadan je linearni operator $A : M_2(\mathbb{R}) \to M_2(\mathbb{R})$ sa

$$A\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} a-b & -a+b+2c \\ a-c-d & -a+2c+d \end{bmatrix}.$$

a) Odredite $r(A)$, $d(A)$, te po jednu bazu za $Ker\,A$ i $Im\,A$.

b) Odredite matricu od A u kanonskoj bazi od $M_2(\mathbb{R})$.

U unitarnom prostoru $\mathbb{R}^4$, sa skalarnim produktom $\langle x|y\rangle = x_1y_1 + 2x_2y_2 + x_3y_3 + 2x_4y_4$, zadan je potprostor V razapet vektorima $v_1 = (1,0,1,0)$ i $v_2 = (1,0,1,1)$. Prikažite vektor $x = (4,2,2,4)$ u obliku $x = v + w$, gdje je $v \in V$, $w \in V^{\perp}$.

Za linearni operator $A : \mathrm{R}^6 \to \mathrm{R}^4$ zadan matricom u paru kanonskih baza

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 4 & 2 & 4 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

odredite jezgru i sliku. Je li vektor $(0,0,0,-1)$ u slici od A?

Odredite realan broj λ tako da matrica $A = \begin{bmatrix} i & 1 \\ 2i & \lambda \end{bmatrix}$ ima svojstveni vektor $\begin{bmatrix} i \\ 1 \end{bmatrix}$.
Može li se matrica A dijagonalizirati? Ako može, u kojoj bazi?

Odredite matricu (u paru kanonskih baza) operatora $T : \mathrm{R}^4 \to \mathrm{R}^4$ ortogonalnog projiciranja na potprostor L razapet vektorima $\mathbf{a} = (0,1,2,0)$, $\mathbf{b} = (0,1,-2,0)$, $\mathbf{c} = (1,-1,0,1)$. Prostor R^4 snabdjeven je standardnim skalarnim produktom.

Neka je M prostor rješenja homogenog sustava

$$\begin{array}{rcrcrcrcl} x_1 & + & x_2 & - & x_3 & - & 3x_4 & = & 0 \\ & & x_2 & - & 2x_3 & - & 2x_4 & = & 0 \end{array}.$$

Odredite neku bazu za M^0, tj. za anihilator od M. Provjerite je li funkcional $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 4x_4$ u M^0?

Neka je operator $A \in L(\mathbf{C}^4)$ zadan izrazom

$$A(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1 - x_2, x_2 - x_3, x_3 - x_4, 2x_4).$$

Odredite spektar operatora A, te algebarsku i geometrijsku kratnost svake svojstvene vrijednosti. Može li se ovaj operator dijagonalizirati?

Neka je L potprostor unitarnog prostora $\mathcal{P}_3$, polinoma stupnja ≤ 3, razapet vektorima $p_1(t) = 1 - t$ i $p_2(t) = t^2 - t$. Odredite neku bazu za ortogonalni komplement od L. Nadalje, prikažite $p(t) = 1 - 2t + 5t^3$ u obliku $q(t) + r(t)$, gdje je $q \in L$, a $r \in L^\perp$.
(Standardni skalarni produkt u $\mathcal{P}_3$ je $(p|q) = \int_0^1 p(t)q(t)dt$.)

Zadan je linearni operator $T : \mathcal{P}_2 \to \mathcal{P}_2$ sa

$$T(a + bt + ct^2) = \frac{1}{3}(a + 2b - c + 3bt - 2(a - b - c)t^2).$$

a) Odredite matricu operatora T u kanonskoj bazi.

b) Ispitajte je li T projektor.

c) Odredite r(T) i d(T).

Dana je matrica

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & b & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Odredite parametre a i b ako je poznato da je A singularna matrica čije sve svojstvene vrijednosti imaju algebarsku kratnost 2.

Neka je M potprostor unitarnog prostora $M_2(\mathbb{R})$ razapet matricama $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ i $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$. Odredite jednu bazu za ortogonalni komplement od M, te prikažite matricu $X = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ u obliku $X = Y_1 + Y_2$, gdje je $Y_1 \in M$, a $Y_2 \in M^{\perp}$.
(Standardni skalarni produkt u $M_2(\mathbb{R})$ je $(A|B) = Tr(AB^T)$.)

Zadan je linearan operator $T : \mathcal{P}_3 \to \mathbf{M}_2(\mathbb{R})$:

$$T(a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3) = \begin{pmatrix} a_0 + a_3 - a_2 & a_0 + 2a_1 - a_2 \\ a_3 & a_0 - a_2 \end{pmatrix}.$$

Prikažite operator T u paru standardnih baza, te mu odredite $KerT$, ImT, $r(T)$ i $d(T)$. ($\mathcal{P}$ je prostor polinoma stupnja ≤ 3.)

Odredite spektar matrice

$$B = A^3 + 3A^2 - A + 4I,$$

gdje je

$$A = \begin{pmatrix} -6 & 10 & -10 \\ -6 & 8 & -6 \\ -3 & 3 & -1 \end{pmatrix}.$$

Ustanovite može li se matrica B dijagonalizirati i je li regularna?

Zadan je V vektorski prostor dimenzije n, i $A \in \mathrm{L}(V)$ takav da je $\mathbf{r}(A) = k$, $0 < k < n$. Definiramo operator $\mathbf{T} : \mathrm{L}(V) \to \mathrm{L}(V)$ formulom $\mathbf{T}(X) = XA$. Odredite $\mathbf{d}(\mathbf{T})$.

Neka je $Q : \mathcal{P}_3 \to \mathcal{P}_3$ ($\mathcal{P}_3$ označava prostor polinom a stupnja ≤ 3) linearan operator zadan s $Q(p) =$ polinom stupnja 2 čiji graf prolazi točkama $(-1, p(-1))$, $(0, p(0))$, $(1, p(1))$. Može li se operator Q dijagonalizirati?

Zadan je linearni operator $T : \mathcal{P}_3 \to \mathbb{R}^4$ s

$$T(a + bt + ct^2) = (a - b, 2c, b + 3c, a + b + c).$$

Nađite mu matrični prikaz u paru baza (B_1, B_2), gdje je

$$B_1 = \{1 + 2t, 1 - t^2, t + t^2\},$$

a B_2 kanonska baza za $\mathbb{R}^4$. Odredite $r(T), d(T)$, te neku bazu za $Ker\, T$ i $Im\, T$. Ispitajte je li operator T monomorfizam, epimorfizam, izomorfizam.

Zadan je unitarni prostor $M_2(\mathbb{R})$ sa skalarnim produktom

$$(A|B) = \mathrm{tr}(AB^*)$$

i neka je $L \leq M_2(\mathbb{R})$ definiran kao

$$L = [\left\{ \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 3 & -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 6 & -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \right\}].$$

Nađite ortonormiranu bazu za L.

U prostoru $\mathbb{R}^4$ zadan je skup vektora $M = \{(2, -1, 1, 1), (-1, 0, -2, 3)(7, -3, 5, 0)\}$. Nađite bazu za anihilator M° od M i nadopunite je do baze za dualni prostor od $\mathbb{R}^4$.

Za matricu A odredite matricu P takvu da je $P^{-1}AP$ dijagonalna matrica;

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 5 & 7 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Zadan je linearni operator $T : \mathcal{P}_2 \to M_2(\mathbf{R})$:

$$T(p) = \begin{pmatrix} p(0) & p(-1) \\ p(1) & p(2) \end{pmatrix}.$$

Prikažite operator T u paru standardnih baza, odredite mu rang i defekt, te po jednu bazu za jezgru i sliku. Da li postoji polinom $q \in \mathcal{P}_2$ takav da je $T(q) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}$? ($\mathcal{P}_2$ je prostor polinoma stupnja ≤ 2.)

Neka je V vektorski prostor, $\dim V = n$, i $T : V \to V$ linearni operator takav da je $T^n = 0$ i $T^{n-1} \neq 0$. Dokažite da postoji vektor $e \in V$ takav da je skup $\{e, Te, T^2e, ..., T^{n-1}e\}$ baza za V.

U unitarnom prostoru $M_2(\mathbf{R})$ sa standardnim skalarnim produktom $(A|B) = tr(AB^\tau)$ dan je potprostor

$$M = [\left\{ \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\}].$$

Odredite jednu bazu za $M^\perp$, te nađite prikaz matrice $A = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ u obliku $A = B + C$, gdje je $B \in M, C \in M^\perp$.

Odredite matricu P takvu da je $P^{-1}AP$ dijagonalna matrica, gdje je

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -2 \\ 0 & 5 & -2 \\ -1 & 4 & 0 \end{pmatrix}.$$

Zadan je linearni operator $T : M_2(\mathbb{R}) \to \mathcal{P}_3$:

$$T\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = (a+2b-d) + (2a+b+c-d)t + (3b-c-d)t^2 + (3a+2c-d)t^3.$$

Odredite matricu operatora T u paru kanonskih baza. Odredite $\mathrm{d}(T)$, $\mathrm{r}(T)$, te po jednu bazu za Ker T i Im T. Je li T monomorfizam, epimorfizam, izomorfizam? ($\mathcal{P}_3$ je prostor polinoma stupnja ≤ 3.)

Zadan je linearni operator $A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ gdje je

$$A(x_1, x_2, x_3) = (2x_1 - x_2, x_1 + 2x_2 + x_3, -x_1 + x_2 + x_3).$$

Odredite svojstvene vrijednosti operatora A. Može li se A dijagonalizirati? Ako može, u kojoj bazi?

U unitarnom prostoru $\mathbb{R}^4$, sa standardnim skalarnim produktom, zadan je potprostor M razapet vektorima $(2,1,0,0)$, $(1,1,1,1)$. Nađite jednu bazu za ortogonalni komplement od M, te prikažite prikažite vektor $a = (3,-4,5,-5)$ kao $a = u + v$, $u \in M$, $v \in M^{\perp}$.

Na vektorskom prostoru $\mathcal{P}_n$ (polinoma stupnja strogo manjeg od n) zadan je linearan operator D_a s

$$(D_a(p))(t) = \frac{p(t+a) - p(t)}{a}, \;\; a \in \mathbb{R}, \;\; a \neq 0.$$

Nađite jezgru i sliku od D_a!

Dopunite do ortogonalne (obzirom na standardni skalarni produkt) baze za $\mathbb{R}^4$ skup

$$\{(1,-2,2,-3), (2,-3,2,4)\}$$

Nađite dualnu bazu baze

$$\{(1,-1,3), (0,1,-1), (0,3,-2)\}$$

od $\mathbb{R}^3$.

Odredite svojstvene vrijednosti matrice A, te njihove algebarske i geometrijske kratnosti pri čemu je

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -4 & 0 & 2 \\ 4 & -5 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

Zadan je linearni operator $T : \mathbf{R}^3 \to M_2(\mathbf{R})$:

$$T(a, b, c) = \begin{pmatrix} a + 2b & a - b + c \\ b - 2c & 5a + 5c \end{pmatrix}.$$

Prikažite operator T u paru standardnih baza, odredite mu rang i defekt, te po jednu bazu za jezgru i sliku.

Neka su U, V i W konačnodimenzionalni vektorski prostori, te $f : U \to V$ i $g : V \to W$ linearni operatori. Dokažite da za rangove linearnih operatora f, g i $g \circ f$ vrijedi

$$r(g \circ f) \leq \min\{r(f), r(g)\}.$$

U unitarnom prostoru $\mathcal{P}_2 = \{p(t) = at^2 + bt + c : a, b, c \in \mathbf{R}\}$ polinoma stupnja manjeg ili jednakog 2 sa skalarnim produktom $\langle p|q \rangle = \int_{-1}^{1} p(t)q(t)dt$ dan je potprostor

$$M = [\{t^2 - 1, t + 1\}].$$

Odredite jednu bazu za $M^\perp$, te nađite prikaz polinoma $p(t) = 2t^2 + t + 5$ u obliku sume $p = p_1 + p_2$, pri čemu je $p_1 \in M, p_2 \in M^\perp$.

Odredite svojstvene vrijednosti, te njihove algebarske i geometrijske kratnosti za matricu

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 1 & -4 & -7 \\ -1 & 3 & 6 \end{pmatrix}.$$

Može li se matrica A dijagonalizirati?

Zadan je linearni operator $T : \mathcal{P}_2 \to M_2(\mathrm{R})$:

$$T(a + bt + ct^2) = \begin{pmatrix} a - 2b & b + c \\ -2a - 4c & -2a + 4b \end{pmatrix}.$$

Prikažite operator T u paru standardnih baza, odredite mu rang i defekt, te po jednu bazu za jezgru i sliku ($\mathcal{P}_2$ je prostor realnih polinoma stupnja ≤ 2).

U prostoru R^4 dan je skup vektora $M = \{(1, -3, 3, 2), (2, 2, -2, 1)\}$. Odredite neku bazu za anihilator M^0 od M i nadopunite je do baze čitavog dualnog prostora od $\mathbf{R}^4$.

Odredite svojstvene vrijednosti i pripadne svojstvene vektore za matricu

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & -2 \\ -1 & 2 & 4 \end{bmatrix}.$$

Neka je $M = [\{a, b\}]$ potprostor unitarnog prostora $\mathbf{R}^n$ (sa standardnim skalarnim produktom) razapet vektorima $a = (0, 1, 2, ..., n-1)$ i $b = (1, 1, ..., 1)$. Odredite njegov ortogonalni komplement $M^\perp$, te prikažite vektor

$$z = (\frac{1}{2}n(3 - n), 1 + \frac{1}{2}n(n - 1), 0, 0, ..., 0) \in \mathrm{R}^n$$

u obliku sume $z = x + y$, gdje je $x \in M$, a $y \in M^\perp$.

Za linearni operator $A : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$, $A(x, y, z) = (x + y, 0, y - z)$ odedite njegovu sliku i jezgru, te njihove baze. Ako je $L = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 : x = y\} \leq \mathbf{R}^3$, odredite $A^{\leftarrow}(L)$ (prasliku potprostora L) i bazu za njega.

Linearni operator T u bazi s elementima $a_1 = (8, -6, 7)$, $a_2 = (-16, 7, -13)$, $a_3 = (9, -3, 7)$ ima matrični zapis

$$\begin{pmatrix} 1 & -18 & 15 \\ -1 & -22 & 20 \\ 1 & -25 & 22 \end{pmatrix}.$$

Nađite mu matrični zapis u bazi $\{b_1, b_2, b_3\}$, gdje su $b_1 = (1, -2, 1)$, $b_2 = (3, -1, 2)$, $b_3 = (2, 1, 2)$.

Prostor L je zadan kao skup rješenja sustava

$$\begin{array}{rrrrl} 2x_1 & +x_2 & +x_3 & +3x_4 & = 0 \\ 3x_1 & +2x_2 & +2x_3 & +x_4 & = 0 \\ x_1 & +2x_2 & +2x_3 & -9x_4 & = 0 \end{array}$$

Prikažite vektor $x = (7, -4, -1, 2)$ u obliku $x = y + z$, pri čemu je $y \in L$, a z iz ortogonalnog komplementa od L u $\mathbf{R}^4$.

Zadan je linearni operator $T : \mathcal{P}_2 \to \mathcal{P}_2$ s

$$T(a + bt + ct^2) = a + b + c + (a + 3b)t + (a - b + 2c)t^2.$$

Odredite mu matrični prikaz u bazi $B = \{1 - t, t - t^2, 1 + t^2\}$. Nadalje, odredite i po jednu bazu za $Ker\,T$ i $Im\,T$. Je li T monomorfizam, epimorfizam, izomorfizam?

Odredite parametre a, b i $c \in \mathbb{R}$ takve da su matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{i} \quad B = \begin{pmatrix} a & b & c \\ 1 & 1 & 1 \\ 4 & 3 & -5 \end{pmatrix}$$

slične.

U prostoru $\mathbb{R}^5$ zadan je skup $M = \{(2, 1, 2, 1, 2), (1, 2, 1, 2, 1)\}$. Nađite bazu za anihilator M° od M te je nadopunite do baze za dualni prostor od $\mathbb{R}^5$.

U unitarnom prostoru $M_2(\mathbb{R})$ sa skalarnim produktom $\langle A, B\rangle = \operatorname{tr}(AB^\tau)$ zadan je potprostor

$$L = [\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \right\}],$$

Nađite ortonormiranu bazu za L, te bazu za ortogonalni komplement od L.

Zadan je linearni operator $T : \mathcal{P}_2 \to M_2(\mathrm{R})$:

$$T(at^2 + bt + c) = \begin{pmatrix} a-b & 2a-4b \\ -a+2b+c & b+c \end{pmatrix}.$$

Prikažite operator T u paru standardnih baza, odredite mu rang i defekt, te po jednu bazu za jezgru i sliku. Ako je $L = \{A \in M_2(\mathbf{R}) : \operatorname{tr}(A) = 0\}$ potprostor matrica čiji je trag 0, odredite $M = T^{\leftarrow}(L) = \{p \in \mathcal{P}_2 : T(p) \in L\}$ i jednu bazu za M.

Neka su U, V i W konačnodimenzionalni vektorski prostori, te $f : U \to V$ i $g : V \to W$ linearni operatori. Dokažite da za rangove linearnih operatora f, g i $g \circ f$ vrijedi

$$r(g \circ f) \le \min\{r(f), r(g)\}.$$

Za realan broj a odredite svojstvene vrijednosti i pripadne svojstvene potprostore za matricu n-tog reda

$$\begin{bmatrix} 1+a & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 1 & 1+a & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+a & \dots & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1+a & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1+a \end{bmatrix}.$$

U unitarnom prostoru $\mathcal{P}_2 = \{p(t) = at^2 + bt + c : a, b, c \in \mathbf{R}\}$ polinoma stupnja manjeg ili jednakog 2 sa skalarnim produktom $\langle p|q\rangle = \int_{-1}^{1} p(t)q(t)dt$ ortonormirajte skup $\{1, t-1, t^2-t\}$.

Zadan je linearni operator $T: M_2(\mathbb{R}) \to M_2(\mathbb{R})$ s $T(A) = BA$, gdje je

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Odredite matricu operatora T u kanonskoj bazi. Nadalje, odredite i svojstvene vrijednosti operatora T, njihove algebarske i geometrijske kratnosti i pripadne svojstvene potprostore. Može li se T dijagonalizirati?

. Zadan je linearni operator $A: \mathcal{P}_3 \to M_2(\mathbb{R})$ s

$$A(p) = \begin{pmatrix} p(1) & p(-1) \\ p'(1) & p'(-1) \end{pmatrix}.$$

Odredite mu rang i defekt, te po jednu bazu za jezgru i sliku. Je li A regularan? Ako jest, odredite A^{-1}. ($\mathcal{P}_3$ je prostor polinoma stupnja ≤ 3.)

U unitarnom prostoru $\mathbb{R}^4$ sa standardnim skalarnim produktom ortonormirajte skup

$$\{(1,2,0,1),(0,2,0,2),(1,-1,1,1),(1,0,0,0)\}.$$

Zadan je linearni operator $A: \mathbb{R}^3 \to M_2(\mathbb{R})$

$$A(x,y,z) = \begin{pmatrix} x-3y & z-2x+y \\ z+x & 3z+4x+2y \end{pmatrix}.$$

Prikažite operator A u paru standardnih baza, odredite mu rang i defekt, te po jednu bazu za sliku i jezgru.

U unitarnom prostoru $\mathcal{P}_3 = \{at^3+bt^2+ct+d \mid a,b,c,d \in \mathbb{R}\}$ polinoma stupnja ≤ 3 sa skalarnim produktom $\langle p,q\rangle = \int_{-1}^{1} p(t)q(t)dt$ dan je potprostor

$$M = [\{1+t, 1\}].$$

Odredite jednu bazu za $M^\perp$, te nađite prikaz polinoma $p(t) = -5t^3+3t^2+3t$ u obliku sume $p = p_1 + p_2$, pri čemu je $p_1 \in M, p_2 \in M^\perp$.

Neka je $f^* : M_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ preslikavanje zadano s $f^*(A) = \mathrm{tr}(A^T M + A)$, gdje

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Dokažite da je f^* linearni funkcional i prikažite ga u bazi $\{f_1^*, f_2^*, f_3^*, f_4^*\}$ koja je dualna bazi

$$\left\{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right\}.$$

Odredite svojstvene vrijednosti, te njihove algebarske i geometrijske kratnosti za matricu

$$A = \begin{pmatrix} -4 & -17 & 19 \\ 1 & 2 & -6 \\ -1 & -5 & 3 \end{pmatrix}.$$

Može li se matrica A dijagonalizirati?

Zadan je preslikavanje $D : \mathcal{P}_2 \to \mathcal{P}_2$ s

$$(D(p))(x) = \frac{p(x+2) - p(x)}{2}.$$

Dokažite da je D linearan operator, odredite mu rang i defekt, te po jednu bazu za sliku i jezgru. Nađite matrični prikaz linearnog operatora D u bazi $B = \{1, x+1, x^2\}$ ($\mathcal{P}_2$ je prostor realnih polinoma stupnja ≤ 2).

Neka je V konačnodimenzionalni vektorski prostor, te $A : V \to V$ i $B : V \to V$ linearni operatori. Dokažite da za rangove linearnih operatora A, B i $A + B$ vrijedi

$$r(A + B) \leq r(A) + r(B).$$

Odredite svojstvene vrijednosti, njihove algebarske i geometrijske kratnosti, te pripadne svojstvene vektore za matricu

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -8 & 4 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

U unitarnom prostoru $\mathbb{R}^4$ sa standardnim skalarnim produktom dan je potprostor $M = [\{(2,1,0,-1),(0,1,1,0)\}]$. Odredite jednu bazu za $M^\perp$, te nađite prikaz vektora $x = (4,-2,-1,2)$ u obliku sume $x = a + b$, pri čemu je $a \in M$ i $b \in M^\perp$.